M. ABD-LEFDIL
Université Mohammed V- Agdal
Département de Physique

Y.Hassouni
Année universitaire 06-07

Mécanique quantique
Série n°2 SM- SMI

Exercices de mathématiques :

I- Soit le fonction créneau f(x) donnée par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > a \\ 1 & \text{si } |x| < a \end{cases}$

- Calculer la Transformée de Fourier T.F. (f(x))
- Représenter graphiquement f(x) et T.F.(f(x)) (cas où a= 3)

II- Soient f(x) et g(k) les T.F. l'une de l'autre. Montrer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(k)|^2 \, dk$$ C'est l'égalité de Parseval- Plantherel.

III- Développer la fonction f(x)= x avec 0<x<2 en :

- Série de sinus
- Série de cosinus

En déduire que $\sum_{n=1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

IV- Chercher une série de Fourier pour $f(x)=x^2$ (0<x<2) par intégration de la série de sinus de f(x)=x (0<x<2). En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$

V- Démontrer le théorème relatif au calcul de la T.F. d'un produit de convolution

VI- Calculer la T. F. de la fonction gaussienne f(x)= $\exp(-\alpha x^2)$

VII- Montrer que la distribution de Dirac δ peut être représentée comme la limite d'une lorentzienne : $y(x,\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$ avec $\varepsilon > 0$

Il existe d'autres représentations possibles:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} e^{-\frac{|x|}{\varepsilon}}$$

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(x/\varepsilon)}{x}$$

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon^2}}$$

VIII- Considérons les fonctions d'ondes suivantes:

$\psi_1(x) = \cos x$

$\psi_2(x) = e^{-i2\beta x}$

$\psi_3(x) = e^{-\alpha x^2}$

$\psi_4(x) = \cos kx + \sin kx$

$\psi_5(x) = \cos x - i \sin kx$

Quelles sont les fonctions propres de $P = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$?

Quelles sont les fonctions propres de P^2 ?

Déterminer ΔP. En déduire Δx.

IX- Lesquels des opérateurs A_i ci-dessous sont-ils linéaires ?

$A_1\psi(x)=(\psi(x))^2$ $\quad$ $A_2\psi(x)=\frac{d\psi}{dx}$

$A_3\psi(x)=\int_a^x \psi(x')\,dx'$ $\quad$ $A_4\psi(x)=x_2\psi(x)$

$A_5\psi(x)=\sin\psi(x)$ $\quad$ $A_6\psi(x)=\frac{d_2\psi(x)}{dx_2}$

Exercices sur le chapitre 2

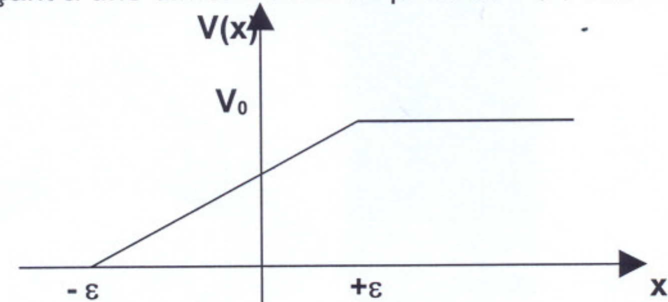
I- On considère une particule de masse m animée d'une vitesse $\vec{V}$ soumise à un potentiel $V(\vec{r})$ indépendant du temps.

1- Ecrire l'équation de Schrödinger de cette particule.

2- En posant l fonction d'onde décrivant cette particule sous la forme : $\psi(\vec{r},t) = \phi(\vec{r})\,u(t)$

Montrer que: $u(t) = Ae^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ et que $\phi(\vec{r})$ obéit à l'équation de Schrödinger indépendante du temps de la forme $H\phi(\vec{r}) = E\,\phi(\vec{r})$

3- En se plaçant à une dimension et en prenant $V(x)$ comme indiqué ci-dessous:



a- Exprimer $\phi'(\varepsilon) - \phi'(-\varepsilon)$

b- Calculer la limite de cette quantité quand $\varepsilon \to 0$ selon que V est fini ou infini. Conclure

II- Un état d'énergie est dit lié si sa fonction d'onde s'annule à l'infini. Dans le cas contraire, il est dit non lié.
Une fonction d'onde décrivant un état indépendant du temps (état stationnaire) d'une particule en mouvement sur un axe X'OX est donnée par : $\phi(x) = Ae^{-a|x|}$ avec $a > 0$

1- Déterminer A pour que la fonction $\phi(x)$ soit normée. S'agit-il d'un état lié?

2- Déterminer $\phi'(\varepsilon) - \phi'(-\varepsilon)$. Conclure.

III- Soit $\phi(r,\theta,\varphi) = Be^{-br^2}$ avec b>0, la fonction qui décrit une particule de masse m.

1- Déterminer B pour que la fonction ϕ soit normée. S'agit-il d'un état lié?

2- Déterminer la forme du potentiel correspondant.

IV- Un électron est décrit par une fonction d'onde $\psi(x) = Ce^{-b|x|}$ avec b= $2\,\mathring{A}^{-1}$ et $-\infty < x < +\infty$

1- Calculer C pour que la fonction Ψ soit normée à l'unité.

2- Chercher la probabilité pour que l'électron soit dans la région $0 \leq x \leq 0{,}25\ \mathring{A}$

3- Utiliser le résultat de 2- pour calculer la probabilité pour que l'électron soit dans la zone $0{,}25\ \mathring{A} \leq x \prec +\infty$.

V- La fonction d'onde d'un système quantique est donnée par: $\psi_0(x) = Ce^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$

1- Déterminer C pour que la fonction Ψ soit normée à l'unité.

2- Déterminer l'incertitude Δx sur x et Δp sur p

On prendra $(\Delta x)^2 = <x^2> - <x>^2$

En déduire le produit $\Delta x\ \Delta p$

3- Montrer que $<x>$ et $<p>$ restent nulles à tout instant.

VI- Une particule de masse m, peut se déplacer suivant l'axe X'OX. Elle est soumise à une force de rappel de la part de O égale à $F = -m\omega^2 x$. Cette particule est représentée à l'instant initial par le paquet d'ondes : $\psi(x,0) = \frac{1}{(2\pi\sigma)^{0,25}} e^{i<p>_0\frac{x}{\hbar}} Ce^{-\frac{(x-<x>_0)^2}{4\sigma}}$

En utilisant le théorème d'Ehrenfest, déterminer la position moyenne $<x>_t$ et l'impulsion moyenne $<p>_t$ à l'instant t.

$<x>_0$ et $<p>_0$ sont le valeurs moyennes pour t=0.

VII- A la date t=0, on considère un paquet d'onde $\psi(x,0)$ à une dimension, de position moyenne x_0 et d'impulsion moyenne p_0, défini par :

$$\psi(x,0) = e^{i\frac{p_0 x}{\hbar}} f(x - x_0) \text{ avec } f(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

La transformée de Fourier de f a pour expression:

$$\text{T.F.}(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{px}{\hbar}} f(x)\, dx = C\frac{\sigma}{\sqrt{\hbar}} e^{-\frac{p^2\sigma^2}{2\hbar^2}}$$

1- Donner l'expression de la T.F. de $\psi(x,0)$ et dessiner l'allure de $|\psi(x,0)|^2$ et $|\text{T.F.}(\psi(x,0))|^2$

2- Le paquet d'onde évolue librement. On note $H = \frac{p^2}{2m}$ l'hamiltonien du système.

Déterminer l'expression de $\text{T.F.}(\psi(x,t))$

3- Faire l'approximation, à l'ordre 1 en p, de H: $H(p) \approx H(p_0) + (p - p_0)(\frac{\partial H}{\partial p})_{p=p_0}$

Pour déduire l'expression de $\psi(x,t)$. Tracer l'allure de $|\psi(x,t)|^2$

4- Même question que précédemment en poussant le développement jusqu'à l'ordre 2 en p.

VIII. Une particule de masse m et d'énergie E est décrite par le paquet d'ondes $\psi(x,t)$ à une dimension

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, g(p) \exp[\frac{i}{\hbar}(px - Et)]$$

où g(p) est une fonction de l'impulsion p ($p \equiv p_x$) de la particule.

1- Sachant que $\psi(x,t)$ obéit à l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t),$$

Trouver la relation entre E et p ; en déduire la nature du mouvement de la particule.

2- La fonction g(p) est donnée par :

$g(p) = B\exp[-A(p-p_o)^2]$ où $B \equiv \frac{(2\pi a^2)^{1/4}}{\sqrt{2\pi\hbar}}$ et $A \equiv \frac{a^2}{4\hbar^2}$; p_o et a sont des constantes.

Exprimer $\psi(x, t=0)$, en utilisant la formule suivante :

$\int_{-\infty}^{+\infty} dp\, \exp[-\alpha^2 p^2 \pm \beta p = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\exp\left(\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right)$ où α et β sont des constantes,

Donner l'abscisse du centre du paquet d'ondes à l'instant t = 0.

3- Rappeler la définition de la vitesse de groupe v_g ; calculer v_g en fonction de p et m. En déduire l'abscisse du centre du paquet d'onde à l'instant t.